Durée : 4 heures

Sauf mention du contraire, les fonctions considérées sont réelles, définies sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ non réduit à un point, et indéfiniment dérivables sur cet intervalle. Dans tout le problème f désigne une telle fonction.

I. Les zéros d'une fonction

1°/ Soient $x_0 \in [a, b]$ et m un entier ≥ 1. Montrer qu'on a

$$f(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$

si et seulement s'il existe une fonction continue h (on ne demande pas plus de régularité pour le moment) telle qu'on ait pour tout x

$$f(x) = (x - x_0)^m h(x)$$

et qu'alors on a

$$h(x_0) = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

On dira que x_0 *est un zéro de multiplicité (au moins)* m *de* f.

2°/ Soit x_0 un zéro de multiplicité m de f. Montrer qu'on a pour tout x

$$f(x) = (x - x_0)^m \int_0^1 \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}[\lambda x_0 + (1 - \lambda)x]\, d\lambda$$

En déduire que la fonction h du 1°/ est indéfiniment dérivable et vérifie

$$h^{(k)}(x_0) = \frac{k!}{(m+k)!} f^{(m+k)}(x_0)$$

pour tout entier k.

3°/ Soient $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ $k+1$ zéros de f de multiplicité $m_0, m_1, \ldots, m_k$. On pose $m = m_0 + m_1 + \ldots + m_k$. Montrer qu'il existe c tel que

$$f^{(m-1)}(c) = 0.$$

[On pourra commencer par envisager le cas où $k = 3$, $m_0 = 1$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$].

4°/ On suppose que f admet une suite infinie (x_k) de zéros distincts. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel qu'on ait $f^{(m)}(c) = 0$ pour tout entier m. On dira qu'un tel c est un *zéro de multiplicité infinie* de f.

A SUIVRE

II. La formule de Newton

On désigne par τ une suite finie $(t_0, ..., t_n)$ de $n+1$ points de $[a, b]$ (avec répétitions possibles), par T l'ensemble des valeurs distinctes prises par la suite τ et, pour $t \in T$, par m_t la multiplicité de t dans τ, i.e. le nombre de fois que t apparait dans τ, si bien que $\sum_{t \in T} m_t = n + 1$.

1°/ On définit pour $t \in T$ et $k = 0, ..., m_t - 1$ une forme linéaire L_t^k sur l'espace vectoriel E_{n+1} des (fonctions) polynômes de degré $\leq n$ par

$$L_t^k(P) = P^{(k)}(t)$$

a) Montrer que les $n+1$ formes L_t^k ainsi définies sont linéairement indépendantes [on pourra d'abord vérifier que parmi les éléments P de E_{n+1} seul le polynôme identiquement nul vérifie $L_t^k(P) = 0$ pour tout $t \in T$ et $k = 0, ..., m_t - 1$].

b) En déduire que, si c_t^k est un réel donné pour tout $t \in T$ et $k = 0, ..., m_t - 1$, il existe un et un seul polynôme P de degré $\leq n$ tel que

$$P^{(k)}(t) = c_t^k$$

pour $t \in T$ et $k = 0, ..., m_t - 1$.

2°/ Soit f une fonction.

a) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré $\leq n$ et une et une seule fonction continue h (on ne demande pas plus de régularité pour le moment) tels que

$$f(x) = P(x) + \left(\prod_{i=0}^{n} (x - t_i) \right) h(x)$$

pour tout x. Que retrouve-t-on si tous les t_i sont égaux ? Montrer que h est indéfiniment dérivable.

b) Montrer que si g est une fonction n'ayant aucun zéro de multiplicité infinie, alors il existe deux polynômes A et B et une fonction φ (de classe C^∞) tels que tout zéro de B soit un zéro de g et que l'on ait

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} + \varphi(x)$$

pour tout x tel que $g(x) \neq 0$.

3°/ On choisit un point x dans $[a, b]$ et on définit une fonction $w(s)$ par

$$w(s) = f(s) - P(s) - \left(\prod_{i=0}^{n} (s - t_i) \right) h(x)$$

où P et h sont définis comme précédemment. Montrer que tout $t \in T \cup \{x\}$ est un zéro de w et que tout $t \in T$ est de multiplicité m_t, et même $m_t + 1$ si $t = x$. En déduire que pour tout x il existe c tel que

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Que retrouve-t-on si T est réduit à un point ?

Tournez la page S.V.P.

III. Calculs de différences divisées.

Etant donné une suite $\tau = (t_0, ..., t_n)$ de points de $[a, b]$ et une fonction f, on notera désormais f_τ le polynôme de degré $\leq n$ et $x \mapsto f[t_0, ..., t_n, x]$ la fonction tels qu'on ait pour tout x

$$f(x) = f_\tau(x) + \left(\prod_{i=0}^{n}(x - t_i)\right) f[t_0, ..., t_n, x]$$

1°/ Montrer que, pour τ réduit à un point t, on a pour $x \neq t$ (resp. $x = t$)

$$f[t, x] = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \qquad (\text{resp.} f[t, x] = f'(t))$$

En déduire qu'en général on a pour $k = 1, ..., n$ et pour tout x

$$f[t_0, ..., t_{k-1}, t_k, x] = (f[t_0, ..., t_{k-1}, \bullet])\,[t_k, x]$$

où $f[t_0, ..., t_{k-1}, \bullet]$ dénote la fonction $g : x \mapsto f[t_0, ..., t_{k-1}, x]$, et donc que l'on a pour $x \neq t_k$ (resp. $x = t_k$)

$$f[t_0, ..., t_k, x] = \frac{f[t_0, ..., t_{k-1}, x] - f[t_0, ..., t_{k-1}, t_k]}{x - t_k} \left(\text{resp.} = \frac{d}{dx} f[t_0, ..., t_{k-1}, x]_{|x=t_k}\right)$$

d'où le nom de "différences divisées" donné aux $f[....]$.

2°/ a) Montrer qu'on a pour $n \geq 1$

$$f_\tau(x) = f(t_0) + \sum_{k=1}^{n}(x - t_0)...(x - t_{k-1})\, f[t_0, ..., t_k]$$

et donc que $f[t_0, ..., t_n]$ *est le coefficient du terme de degré n du polynôme* f_τ, ce qui reste vrai pour $n = 0$ si on convient de poser $f[t_0] = f(t_0)$.

b) Soit π une permutation de $\{0, ..., n\}$. Montrer que l'on a

$$f[t_0, ..., t_n] = f[t_{\pi(0)}, ..., t_{\pi(n)}]$$

c) Soient $\sigma = (s_0, ..., s_p)$ une sous-suite extraite de τ et $\rho = (r_0, ..., r_q)$ la sous-suite restante après cette extraction. Montrer qu'on a

$$f[t_0, ..., t_n] = (f[s_0, ..., s_p, \bullet])\,[r_0, ..., r_q]$$

3°/ [On s'aidera des formes linéaires L_t^k définies au II.1°/ ; on introduira d'autre part la forme linéaire ℓ sur l'espace E_{n+1} des polynômes de degré $\leq n$ qui à P associe le coefficient du terme de degré n de P, lequel peut être nul].

a) Montrer qu'il existe des nombres a_t^k, pour $t \in T$ et $k = 0, ..., m_t - 1$, ne dépendant pas de la fonction f considérée, tels qu'on ait

$$f[t_0, ..., t_n] = \sum_{t \in T} \sum_{k=0}^{m_t - 1} a_t^k f^{(k)}(t)$$

b) Montrer que, pour $t \in T$ fixé, on a

$$\sum_{k=0}^{m_t - 1} a_t^k f^{(k)}(t) = \frac{1}{(m_t - 1)!} \frac{d^{m_t - 1}}{dx^{m_t - 1}} \left[\frac{f(x)}{\prod_{s \in T, s \neq t}(x - s)^{m_s}}\right]_{|x=t}$$

A SUIVRE

[On pourra se ramener à vérifier l'égalité des deux membres pour suffisamment de fonctions polynômes f judicieusement choisies].

c) En déduire l'expression des a_t^k pour $t \in T$ et $k = 0, ..., m_t - 1$ en fonction des constantes suivantes (qu'on ne cherchera pas à développer)

$$\lambda_t^k = \frac{d^{m_t-1-k}}{dx^{m_t-1-k}} \left[\frac{1}{\prod_{s \in T, s \neq t} (x-s)^{m_s}} \right]_{|x=t}$$

IV Étude d'un cas particulier

On suppose désormais que τ=(a,a,b,b) et on munit l'espace vectoriel des fonctions considérées du produit scalaire $< u, v >= \int_a^b u(t)\, v(t)\, dt$. Enfin on se donne une fonction f ; on a alors d'après ce qui précède

$$f(x) = f_\tau(x) + (x-a)^2(x-b)^2\, f[a, a, b, b, x]$$

En particulier la fonction "d'erreur" $e = f - f_\tau$ est nulle ainsi que sa dérivée e' en a et en b.

1°/ Montrer que e'' est orthogonale à tout polynôme de degré ≤ 1. En déduire que f_τ'' est la projection orthogonale de f'' sur le sous-espace des polynômes de degré ≤ 1.

2°/ Soit Γ l'ensemble des fonctions g vérifiant

$$f(a) = g(a),\ f'(a) = g'(a) \ \text{ et } \ f(b) = g(b),\ f'(b) = g'(b)$$

Montrer qu'on a

$$\int_a^b |f_\tau''(t)|^2 dt = \inf_{g \in \Gamma} \int_a^b |g''(t)|^2 dt$$

3°/ On pose

$$M = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$$

a) Montrer en utilisant II-3°/ que l'on a pour tout x

$$|f(x) - f_\tau(x)| \leq \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4!} M$$

et donc

$$|f(x) - f_\tau(x)| \leq \frac{(b-a)^4}{2^4\, 4!} M$$

b) Montrer que l'on a

$$\int_a^b |f''(t) - f_\tau''(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^5}{6!} M^2$$

[On utilisera la première inégalité du a)].

c) En utilisant l'inégalité de Schwarz, déduire de b) qu'on a pour tout x

$$|f'(x) - f_\tau'(x)| \leq \frac{(b-a)^3}{\sqrt{(6!)}} M$$

FIN